



**NỘI DUNG: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ
PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN**
THỜI GIAN HỌC: TUẦN 1 – TUẦN 2

BÀI 1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hàm số sin

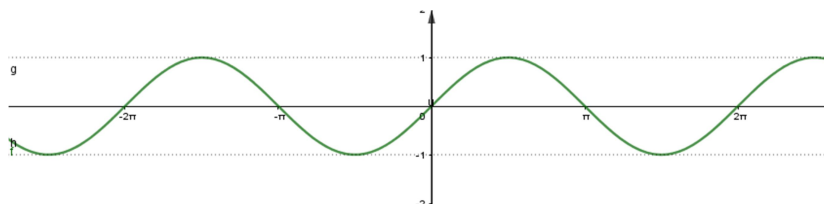
Hàm số $y = \sin x$ xác định trên $\mathbb{R}$, nhận giá trị trên $[-1;1]$ và

- Là hàm số lẻ vì: $\sin(-x) = -\sin x, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π .

Hàm số $y = \sin x$ nhận các giá trị đặc biệt:

- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Đồ thị hàm số $y = \sin x$:



2. Hàm số cosin

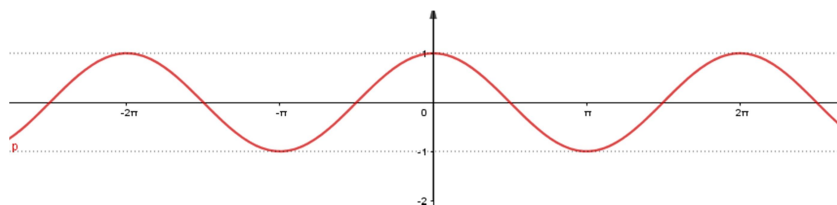
Hàm số $y = \cos x$ xác định trên $\mathbb{R}$, nhận giá trị trên $[-1;1]$ và

- Là hàm số chẵn vì: $\cos(-x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π .

Hàm số $y = \cos x$ nhận các giá trị đặc biệt:

- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Đồ thị hàm số $y = \cos x$:



3. Đồ thị hàm số tang

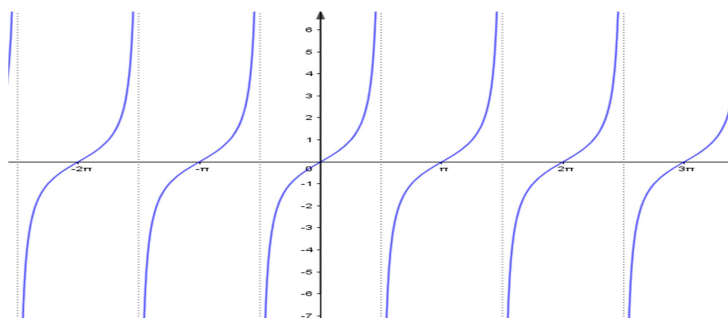
Hàm số $y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$, nhận giá trị trên $\mathbb{R}$ và

- Là hàm số lẻ vì: $\tan(-x) = -\tan x, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ π .

Hàm số $y = \tan x$ nhận các giá trị đặc biệt:

- $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Đồ thị hàm số $y = \tan x$:



4. Đồ thị hàm số cotang :

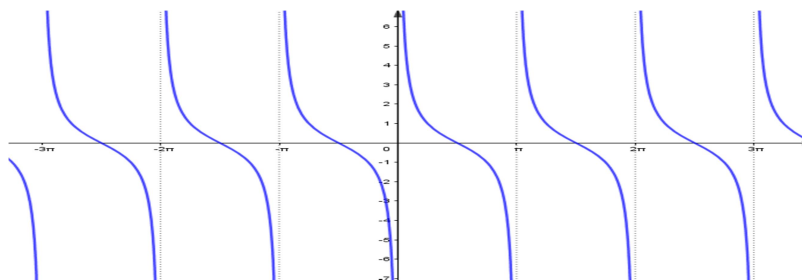
Hàm số $y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, nhận giá trị trên $\mathbb{R}$ và

- Là hàm số lẻ vì: $\cot(-x) = -\cot x, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ π .

Hàm số $y = \cot x$ nhận các giá trị đặc biệt:

- $\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $\cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Đồ thị hàm số $y = \cot x$:



B. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Tìm tập xác định của hàm số lượng giác

Phương pháp giải: Khi tìm tập xác định của hàm số, ta cần lưu ý

- Các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- Hàm số $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ xác định khi $Q(x) \neq 0$. Từ đó suy ra:
 - Hàm số $y = \tan x$ xác định khi $\cos x \neq 0$.
 - Hàm số $y = \cot x$ xác định khi $\sin x \neq 0$.
- Hàm số $y = \sqrt{f(x)}$ xác định khi $f(x) \geq 0$.

Ví dụ 1. Tìm tập xác định của hàm số $y = \tan(x - \frac{\pi}{6})$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Điều kiện: } \cos(x - \frac{\pi}{6}) \neq 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{2\pi}{3} + k\pi$$

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ví dụ 2. Tìm tập xác định của hàm số $y = \cot^2(\frac{2\pi}{3} - 3x)$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Điều kiện: } \sin(\frac{2\pi}{3} - 3x) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} - 3x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{2\pi}{9} - k\frac{\pi}{3}$$

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ví dụ 3. Tìm tập xác định D của các hàm số $y = \frac{\sin x + 2}{\sin x \cos^2 x}$

Hướng dẫn giải:

Hàm số xác định khi

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Vậy tập xác định của hàm số là } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$



Ví dụ 4. Tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{\frac{2\cos x + 3}{\sin x + 1}}$ là :

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 C. $D = \mathbb{R}$.
 D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Hàm số xác định khi } \begin{cases} \sin x \neq 1 \\ \frac{2\cos x + 3}{\sin x + 1} \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

Do $-1 \leq \sin x \leq 1$, $-1 \leq \cos x \leq 1$ nên $2\cos x + 3 > 0$ và $\sin x + 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Từ đó suy ra (1) $\Leftrightarrow \sin x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

Vậy tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. **Đáp án là B.**

Dạng 2. Xác định tính chẵn, lẻ của hàm số

Phương pháp giải: Khi xác định tính chẵn, lẻ của hàm số $y = f(x)$, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: tìm tập xác định D của hàm số.

- Nếu D không là tập đối xứng, nghĩa là $\exists x \in D$ sao cho $-x \notin D$ thì ta kết luận ngay hàm số $y = f(x)$ không chẵn, không lẻ.
- Nếu D là tập đối xứng thì ta thực hiện tiếp bước 2.

Bước 2

- Nếu $f(-x) = f(x)$ với mọi $x \in D$ thì hàm số $y = f(x)$ là hàm chẵn.
- Nếu $f(-x) = -f(x)$ với mọi $x \in D$ thì hàm số $y = f(x)$ là hàm lẻ.
- Nếu mà $f(-x) \neq f(x)$ ($f(-x) \neq -f(x)$) thì hàm số $y = f(x)$ là hàm không chẵn (không lẻ).

Chú ý: Khi xác định tính chẵn, lẻ của hàm số lượng giác ta cần lưu ý:

- $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin x$;
- $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos x$;
- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, \tan(-x) = -\tan x$;
- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, \cot(-x) = -\cot x$.

Ví dụ 5. Hàm số nào sau đây **không** phải là hàm số lẻ?

Hướng dẫn giải:



Do $\cos(-x) = \cos x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên $y = \cos x$ không là hàm lẻ.

Ví dụ 6. Hàm số $y = \sin x \cdot \cos x$ là:

- A. Hàm số không có tính chẵn, lẻ. B. Hàm chẵn.
C. Hàm có giá trị lớn nhất bằng 1. D. Hàm lẻ.

Hướng dẫn giải:

Kí hiệu $f(x) = \sin x \cos x$. Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = \sin(-x) \cos(-x) = -\sin x \cos x = -f(x)$.

Vậy, $y = \sin x \cos x$ là hàm số lẻ. **Đáp án là D.**

Dạng 3. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

Phương pháp giải: Để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một hàm số lượng giác, ta biến đổi hàm số đã cho về dạng $y = a + b \sin t$ hoặc $y = a + b \cos t$ và sử dụng kết quả: $-1 \leq \sin t \leq 1; -1 \leq \cos t \leq 1$.

Ví dụ 7. Hàm số $y = 2 \sin x \cos x + \cos 2x$ có giá trị lớn nhất là

Hướng dẫn giải:

Ta có: $y = \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ nên giá trị lớn nhất của hàm số là $\sqrt{2}$.

Ví dụ 8. Hàm số $y = (\sin x - \cos x)^2 + \cos 2x$ có giá trị nhỏ nhất là

- A. -1. B. $1 - \sqrt{2}$. C. 0. D. $1 + \sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $y = \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos 2x = 1 - \sin 2x + \cos 2x = 1 - \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Từ đó suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số là $1 - \sqrt{2}$. **Đáp án là B.**

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN.

Câu 1. Hàm số $y = \frac{\cos x}{2 \sin x - \sqrt{3}}$ có tập xác định là:

- A. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
C. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi, \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 2. Hàm số $y = \tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ có tập xác định là:

- A. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
C. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $\mathbb{R}$.

Câu 3. Hàm số $y = \cot\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 2$ có tập xác định là:



A. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 4. Hàm số $y = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 - \sin x}}$ có tập xác định là:

A. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

B. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $\mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 5. Cho hàm số $y = \frac{\sin x}{1 + \tan x}$ và $k \in \mathbb{Z}$.

Khoảng nào dưới đây không nằm trong tập xác định của hàm số?

A. $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi \right).$

B. $\left(\pi + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi \right).$

C. $\left(\frac{3\pi}{4} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi \right).$

D. $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{4} + k2\pi \right).$

Câu 6. Hàm số $y = \sqrt{\frac{\cos x - 1}{3 + \sin x}}$ có tập xác định là:

A. $\mathbb{R}.$

B. $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

C. $\{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

D. $\emptyset.$

Câu 7. Hàm số $y = \sin x \cdot \cos 2x$ là:

A. Hàm số chẵn.

B. Hàm số không có tính chẵn lẻ.

C. Hàm số không có tính tuần hoàn.

D. Hàm số lẻ.

Câu 8. Hàm số $y = \frac{\tan 3x}{\sin^3 x}$ thỏa mãn tính chất nào sau đây?

A. Hàm số chẵn.

B. Hàm số không có tính chẵn, lẻ.

C. Xác định trên $\mathbb{R}.$

D. Hàm số lẻ.

Câu 9. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm lẻ?

A. $y = \sin^2 x.$

B. $y = \sin^2 x \cdot \cos x.$

C. $y = \frac{\tan x}{\cos x}.$

D. $y = \frac{\cot x}{\sin x}.$

Câu 10. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm chẵn?

A. $y = \frac{\tan 2x}{\tan^2 x + 1}.$

B. $y = \sin x \cdot \cos 2x.$

C. $y = \cos x \cdot \sin^2 x.$

D. $y = \cos x \cdot \sin^3 x.$

Câu 11. Trong các hàm số sau, hàm số nào không là hàm chẵn và cũng không là hàm lẻ?

A. $y = \tan x - \frac{1}{\sin x}.$

B. $y = \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right).$

C. $y = \sin x + \tan x.$

D. $y = \sin^4 x - \cos^4 x.$

Câu 12. Hàm số $y = (\sin x + \cos x)^2 + \cos 2x$ có giá trị lớn nhất là:

A. $1 + \sqrt{2}.$

B. 3.

C. 5.

D. $\sqrt{2}.$

Câu 13. Hàm số $y = \sqrt{3} \sin x - \cos x$ có giá trị nhỏ nhất là:



A. $1 - \sqrt{3}$.

B. $-\sqrt{3}$.

C. -2 .

D. $-1 - \sqrt{3}$.

Câu 14. Cho hàm số $y = \frac{\cos x - 1}{\cos x + 2}$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề sai?

A. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0.

C. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng -2 .D. Hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = 2$.

Câu 15. Hàm số sau đây có giá trị lớn nhất bằng 2?

A. $y = \tan x - \cot x$.

B. $y = \tan 2x$.

C. $y = \sqrt{2}(\cos x - \sin x)$.

D. $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Câu 16. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3 - 4\sin^2 x \cos^2 x$ là:

A. -1 .

B. 2 .

C. 1 .

D. 3 .

Câu 17: Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 3 - 2\cos^2 3x$

A. $\min y = 1, \max y = 2$

B. $\min y = 1, \max y = 3$

C. $\min y = 2, \max y = 3$

D. $\min y = -1, \max y = 3$

Câu 18: Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 1 + \sqrt{2 + \sin 2x}$

A. $\min y = 2, \max y = 1 + \sqrt{3}$

B. $\min y = 2, \max y = 2 + \sqrt{3}$

C. $\min y = 1, \max y = 1 + \sqrt{3}$

D. $\min y = 1, \max y = 2$

Câu 19: Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = \frac{4}{1 + 2\sin^2 x}$

A. $\min y = \frac{4}{3}, \max y = 4$

B. $\min y = \frac{4}{3}, \max y = 3$

C. $\min y = \frac{4}{3}, \max y = 2$

D. $\min y = \frac{1}{2}, \max y = 4$

Câu 20: Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 2\sin^2 x + \cos^2 2x$

A. $\max y = 4, \min y = \frac{3}{4}$

B. $\max y = 3, \min y = 2$

C. $\max y = 4, \min y = 2$

D. $\max y = 3, \min y = \frac{3}{4}$

Câu 21: Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 3\sin x + 4\cos x + 1$

A. $\max y = 6, \min y = -2$

B. $\max y = 4, \min y = -4$

C. $\max y = 6, \min y = -4$

D. $\max y = 6, \min y = -1$

Câu 22: Tập xác định của hàm số $y = \frac{3}{\sin^2 x - \cos^2 x}$ là

A. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

D. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 23: Tập xác định của hàm số $y = \frac{\cot x}{\cos x - 1}$ là

A. $\mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

B. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

C. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

D. $\mathbb{R}$



Câu 24: Tập xác định của hàm số $y = \tan x + \cot x$ là

- A. $\mathbb{R}$ B. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ C. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$ D. $\mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$

Câu 25: Tìm tập xác định của hàm số sau $y = \sqrt{\frac{1 + \cot^2 x}{1 - \sin 3x}}$

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{k\pi, \frac{\pi}{6} + \frac{n2\pi}{3}; k, n \in \mathbb{Z}\right\}$ B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6} + \frac{n2\pi}{3}; k, n \in \mathbb{Z}\right\}$
 C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{k\pi, \frac{\pi}{6} + \frac{n2\pi}{5}; k, n \in \mathbb{Z}\right\}$ D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{k\pi, \frac{\pi}{5} + \frac{n2\pi}{3}; k, n \in \mathbb{Z}\right\}$

ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
D	C	D	C	A	C	D	A	C	C	B	A	C	D	C	B	B	A	A	D	C	C	C	D	A

BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình $\sin x = a$ (1)

- $|a| > 1$: Phương trình vô nghiệm.
- $|a| \leq 1$: Gọi α là một cung sao cho $\sin \alpha = a$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha$ và (1) có các nghiệm $x = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \pi - \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chú ý:

- Khi $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ và $\sin \alpha = a$ thì ta viết $\alpha = \arcsin a$.
- Phương trình $\sin x = \sin \beta^\circ$ có các nghiệm: $x = \beta^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ và $x = 180^\circ - \beta^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
- Trong một công thức nghiệm của phương trình lượng giác, không đồng thời hai đơn vị độ và radian.

2. Phương trình $\cos x = a$ (2)

- $|a| > 1$: Phương trình (2) vô nghiệm.
- $|a| \leq 1$: Gọi α là một cung sao cho $\cos \alpha = a$. Khi đó (2) $\Leftrightarrow \cos x = \cos \alpha$ và (2) có các nghiệm $x = \pm \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chú ý:

- Khi $0 \leq \alpha \leq \pi$ và $\cos \alpha = a$ thì ta viết $\alpha = \arccos a$.
- Phương trình $\cos x = \cos \beta^\circ$ có các nghiệm: $x = \pm \beta^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

3. Phương trình $\tan x = a$ (3)

- Phương trình (3) xác định khi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.



- $\forall x \in \mathbb{R}$, tồn tại cung α sao cho $\tan \alpha = a$. Khi đó $(3) \Leftrightarrow \tan x = \tan \alpha$ và (3) có nghiệm là $x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chú ý:

- Khi $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ và $\tan \alpha = a$ thì ta viết $\alpha = \arctan a$.
- Phương trình $\tan x = \tan \beta^\circ$ có các nghiệm: $x = \beta^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

4. Phương trình $\cot x = a$ (4)

- Phương trình (4) xác định khi $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, tồn tại cung α sao cho $\cot \alpha = a$. Khi đó $(4) \Leftrightarrow \cot x = \cot \alpha$ và (4) có nghiệm là $x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chú ý:

- Khi $0 < \alpha < \pi$ và $\cot \alpha = a$ thì ta viết $\alpha = \operatorname{arccot} a$.
- Phương trình $\cot x = \cot \beta^\circ$ có các nghiệm: $x = \beta^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1: Phương trình $\sin x = \cos x$ có số nghiệm thuộc đoạn $[0; \pi]$ là:

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có } \sin x = \cos x \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Do $x \in [0; \pi]$ nên $k = 0$. Vậy chỉ có 1 nghiệm của phương trình thuộc $[0; \pi]$.

Ví dụ 2: Phương trình $\sin 2x = 1$ có nghiệm là:

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } \sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 3: Phương trình $\sin^2 \frac{x}{3} = 1$ có nghiệm là:

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có } \sin^2 \frac{x}{3} = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \frac{x}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + k3\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 4: Phương trình $2\cos x - \sqrt{3} = 0$ có tập nghiệm trong khoảng $(0; 2\pi)$ là:

$$\text{A. } \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right\}. \quad \text{B. } \left\{ \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} \right\}. \quad \text{C. } \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right\}. \quad \text{D. } \left\{ \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6} \right\}.$$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } 2\cos x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$



Do $x \in (0; 2\pi)$ nên tập nghiệm của phương trình là $\left\{\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right\}$.

Chọn đáp án là A.

Ví dụ 5: Phương trình $\sin(\pi \cos 2x) = 1$ có nghiệm là:

A. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $\sin(\pi \cos 2x) = 1 \Leftrightarrow \pi \cos 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} + 2k, k \in \mathbb{Z}$. Do $-1 \leq \cos 2x \leq 1$ và $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = 0$ và do đó phương trình đã cho tương đương với

$\cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$.

Chọn đáp án là D.

C.BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1: Phương trình $\cos \frac{x}{2} = -1$ có nghiệm là:

A. $x = 2\pi + k4\pi, k \in \mathbb{Z}$

B. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

C. $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

D. $x = 2\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Câu 2: Phương trình $\cos^2 3x = 1$ có nghiệm là:

A. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

B. $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

C. $x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

D. $x = \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 3: Phương trình $\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ có nghiệm là:

A. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

B. $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

C. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

D. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Câu 4: Phương trình $\cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ có nghiệm là:

A. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

B. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

C. $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

D. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Câu 5: Trong $[0; \pi]$, phương trình $\sin x = 1 - \cos^2 x$ có tập nghiệm là:



A. $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ B. $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ C. $\{0, \pi\}$ D. $\left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}$

Câu 6: Trong $[0; 2\pi)$, phương trình $\cos 2x + \sin x = 0$ có tập nghiệm là:

A. $\left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$ B. $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$ C. $\left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$ D. $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$

Câu 7: Trong $[0; 2\pi)$, phương trình $\sin 2x + \sin x = 0$ có số nghiệm là:

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 8: Phương trình $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$ có số nghiệm thuộc $(0; 3\pi)$ là:

A. 2 B. 3 C. 4 D. 6

Câu 9: Số nghiệm của phương trình: $\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ thuộc $[0; 2\pi]$ là:

A. 0 B. 2 C. 1 D. 3

Câu 10: Số nghiệm của phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ thuộc $[0; 3\pi]$ là:

A. 1 B. 0 C. 2 D. 3

Câu 11: Trong các phương trình sau, phương trình nào có nghiệm?

A. $\sqrt{3} \sin x = 2$ B. $\frac{1}{4} \cos 4x = \frac{1}{2}$
C. $2 \sin x + 3 \cos x = 1$ D. $\cot^2 x - \cot x + 5 = 0$

Câu 12: Trong các phương trình sau, phương trình nào vô nghiệm?

A. $\sin 2x - \cos 2x = 1$ B. $\sin 2x - \cos x = 0$
C. $\sin x = \frac{2\pi}{5}$ D. $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$

Câu 13: Tập nghiệm của phương trình $3 \tan \frac{x}{4} = \sqrt{3}$ trong khoảng $[0; 2\pi)$ là:

A. $\left\{\frac{2\pi}{3}\right\}$ B. $\left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$ C. $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$ D. $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

Câu 14: Tập nghiệm của phương trình $\cos^2 x - \cos 2x = 0$ trong khoảng $[0; 2\pi)$ là:

A. $\{0, \pi\}$ B. $\left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}$ C. $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ D. $\left\{0, \frac{3\pi}{2}\right\}$

Câu 15: Phương trình $\cos(\pi \sin x) = 1$ có nghiệm là:

A. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ B. $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$
C. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ D. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Câu 16: Phương trình $\cos(\pi \cos 3x) = 1$ có nghiệm là:

A. $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$ B. $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
C. $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ D. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$



Câu 17: Phương trình $\frac{\sin x - 1}{\tan x - 1} = 0$ có tập nghiệm là:

A. $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

B. $\left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

C. $\emptyset$

D. $\left\{-\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Câu 18: Phương trình $\frac{\sin 2x + 2 \cos x - \sin x - 1}{\tan x + \sqrt{3}} = 0$ có tập nghiệm là:

A. $\left\{\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

B. $\left\{\pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

C. $\left\{\pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, -\frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$

D. $\left\{-\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Câu 19: Phương trình $\sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0$ có tập nghiệm trong $(0; \pi)$ là:

A. $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$

B. $\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

C. $\left\{\frac{3\pi}{4}\right\}$

D. $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$

Câu 20: Phương trình $\cos 2x + 2 \cos^2 x - 1 = 0$ có tập nghiệm là:

A. $\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

B. $\left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

C. $\left\{\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

D. $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
A	C	A	B	D	B	C	B	B	C	C	C	A	A	A	C	C	A	A	B